



Серия №30. Геометрический разнбой

18 июля

1. Дан треугольник ABC . На продолжении BC за точку C взяли точку D так, что $BC = CD$. На продолжении CA за точку A взяли точку E так, что $AE = 2AC$. При этом оказалось, что $BE = AD$. Докажите, что треугольник ABC – прямоугольный.
2. Даны прямая l , окружность ω и точка A . Постройте циркулем и линейкой квадрат $ABCD$ такой, что точки B и C лежат на l и ω соответственно.
3. На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC взяты такие точки P , M и K , что отрезки AM , BK и CP пересекаются в точке G и сумма векторов $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{CP}$ равна 0 . Докажите, что G – точка пересечения медиан треугольника ABC .
4. Конечное множество точек S таково, что для любых двух различных точек $A, B \in S$ существует движение плоскости, которое переводит A в B , но при этом всё множество переходит в себя. Докажите, что все точки множества S лежат на одной окружности.
5. Неравнобедренный остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O . Биссектриса AD пересекает описанную окружность в точке K . Окружность с диаметром AO проходит через точку D и пересекает AB и AC в точках E , F соответственно. Точки M , N – середины отрезков BE , CF соответственно. Лучи DM , DN пересекают прямую EF в точках X , Y соответственно. Докажите, что OK – серединный перпендикуляр к отрезку XY .
6. В окружности проведены перпендикулярные диаметры AB и CD . Из точки M , лежащей вне окружности, проведены касательные к окружности, пересекающие прямую AB в точках E и H , а также прямые MC и MD , пересекающие прямую AB в точках F и K . Докажите, что $EF = KH$.
7. Дан остроугольный треугольник ABC с ортоцентром H . Точка M – середина стороны BC . Окружность ω_B проходит через точки B , H , M , окружность ω_C проходит через точки C , H , M . Прямая AB вторично пересекает ω_B в точке P , прямая AC вторично пересекает ω_C в точке Q . Прямая PH вторично пересекает ω_C в точке R . Прямая QH вторично пересекает ω_B в точке S . Докажите, что точки R , S , M лежат на одной прямой.
8. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABM , BCN , CAK . Из середины отрезка MN опущен перпендикуляр к стороне AC . Два других перпендикуляра определяются аналогично. Докажите, что эти перпендикуляры пересекаются в одной точке.